TD N° : 3

N.B : Pour simplifier la notation on écrit y à la place de $y(x)$.

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1) $y' = \dfrac{xy}{\sqrt{4-x^2}}$, $\qquad (E_3)$ $xy' - y = \dfrac{x}{x^2-1}$,

(E_2) $(1+x^2)y' + 3xy = 0$, $\qquad (E_4)$ $(1-x^2)y' - xy = 1$.

Exercice 2 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$(E): \qquad 2xy' + y = \frac{1}{1-x}.$$

1)– Intégrer (E) sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]1,1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$.

2)– Est-il possible de trouver une solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles à préciser, puis vérifier s'il existe des solutions définies sur $\mathbb{R}$:

$$(E_1) \quad (2+x)y' + y = 2, \quad (E_2) \quad \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1, \quad (E_3) \quad xy' - y = \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Exercice 4 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$(a) \begin{cases} x^2y' - (2x-1)y = x^2, \\ y(1) = 1, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} (e^x+1)y' - y = \dfrac{e^x}{1+x^2}, \\ y(0) = -\dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \quad (c) \begin{cases} y' - 3y = \sin(3x) + \sin(2x), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 5 : Déterminer la solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E): \qquad \frac{y - xy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1,$$

définie sur $\mathbb{R}$ et passant par les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : (Équation de Bernoulli)
On considère l'équation différentielle de Bernoulli suivante :

$$(E): \qquad y' + 2xy + xy^4 = 0$$

Soit $x \mapsto y(x)$ une solution de (E). On considère la fonction z définie par $z(x) = \dfrac{1}{y(x)^3}$.

1)– Montrer que $z'(x) = -\dfrac{-3y'(x)}{y(x)^4}$.

2)– Former l'équation (E′) vérifiée par $z(x)$.

3)– Résoudre (E′) puis (E).

Exercice 7 : (Équation de Riccati)

1)– Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

2)– Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \dfrac{1}{x}$ est une solution particulière.

Exercice 8 : Résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes :

(E_1) $-y'' - 5y' + 6y = xe^x$,

(E_2) $y'' - y' - 2y = \cos x$,

(E_3) $y'' - 5y' - 14y = (3x^2 + 2x - 1)e^x$,

(E_4) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos(2x) + 5x + 3$.

Exercice 9 : Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' + y = \sin \omega x$ en fonction du paramètre $\omega \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 : On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + y = 0$. La résoudre sur $I =]0, +\infty[$ en posant, pour y solution, $z(x) = y(e^x)$.

Exercice 11 : (Équation d'Euler)
On considère l'équation différentielle $(E): \quad x^2y'' + xy' + y = 0;\ (x > 0)$. On introduit une nouvelle variable u en posant $u = \ln(x)$ (pour $x > 0$). On suppose que y est une solution de (E). Soit z la fonction de la variable u, définie par $z(u) = z(\ln(x)) = y(x) = y(e^u)$.

1)– Montrer les relations : $y'(x) = z'(\ln x)\dfrac{1}{x}$ et $y''(x) = z''(\ln x)\dfrac{1}{x^2} - z'(\ln x)\dfrac{1}{x^2}$.

2)– Former une équation différentielle (E′) vérifiée par z.

3)– Résoudre (E′) puis (E).

Exercice 12 : Soit $P(x)$ un polynôme et a, b, c, s des constantes réelles ($a \neq 0$). Montrer que l'équation $(E): \quad ay'' + by' + cy = P(x)e^{sx}$ admet une solution unique de la forme $y = x^kQ(x)e^{sx}$ où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$ et

- $k = 0$ si s n'est pas racine de l'équation caractéristique,
- $k = 1$ ou $k = 2$ suivant que s est racine simple ou double de l'équation caractéristique.